I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Honzík dostal kapesné a chce si za ně koupit něco dobrého. Kdyby si koupil čtyři koláče, zbylo by mu 5 Kč. Kdyby si chtěl koupit pět koláčů, chybělo by mu 6 Kč. Kdyby si koupil dva koláče a tři koblihy, utratil by celé kapesné beze zbytku.

Kolik stojí jedna kobliha? (*L. Dedková*)

Z5–I–2

Honza měl tři klece (černou, stříbrnou, zlatou) a tři zvířata (morče, potkana a tchoře). V každé kleci bylo jedno zvíře. Zlatá klec stála nalevo od černé klece. Stříbrná klec stála napravo od klece s morčetem. Potkan byl v kleci napravo od stříbrné klece.

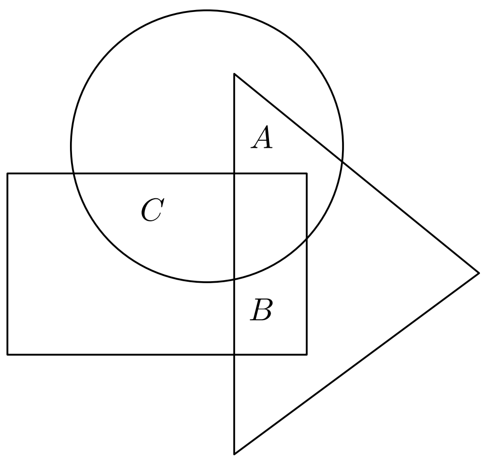
Určete, v které kleci bylo které zvíře. (*L. Hozová*)

Z5–I–3

Na obrázku je diagram se sedmi políčky. Nakreslete do něj hvězdičky tak, aby byly splněny všechny následující podmínky:

- Hvězdiček je celkem 21.
- V každém políčku je alespoň jedna hvězdička.
- V políčkách označených A, B, C je dohromady 8 hvězdiček.
- V políčkách označených A a B je dohromady méně hvězdiček než v políčku označeném C.
- V políčku označeném B je více hvězdiček než v políčku označeném A.
- V kruhu je celkem 15 hvězdiček, v trojúhelníku celkem 12 hvězdiček a v obdélníku celkem 14 hvězdiček.

(*E. Semerádová*)



Z5–I–4

Eva s Markem hráli badminton a Viktor jim počítal výměny. Po každých 10 výměnách nakreslil Viktor křížek (X). Poté místo každých 10 křížků nakreslil kolečko (O) a odpovídajících 10 křížků smazal. Když Eva a Marek hru ukončili, měl Viktor nakresleno toto:

OOOXXXXXXX

Určete kolik nejméně a kolik nejvíce výměn Eva s Markem sehrála. (*M. Smitková*)

Z5–I–5

Sestrojte libovolnou úsečku AS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem A.

1. Sestrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodem A tvořily obdélník $AEFG$. Najděte alespoň dvě řešení.
2. Sestrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodem A tvořily čtverec $ABCD$.

(*L. Růžičková*)

Z5–I–6

Na stole leželo osm kartiček s čísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ferda si vybral tři kartičky. Sečetl na nich napsaná čísla a zjistil, že jejich součet je o 1 větší než součet čísel na zbylých kartičkách.

Které kartičky mohly zůstat na stole? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

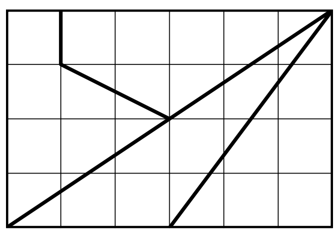
Anička a Blanka si napsaly každá jedno dvojmístné číslo, které začínalo sedmičkou. Dívky si zvolily různá čísla. Poté každá mezi obě číslice vložila nulu, takže jim vzniklo trojmístné číslo. Od něj každá odečetla svoje původní dvojmístné číslo. Výsledek je překvapil.

Určete, jak se jejich výsledky lišily. (*L. Hozová*)

Z6–I–2

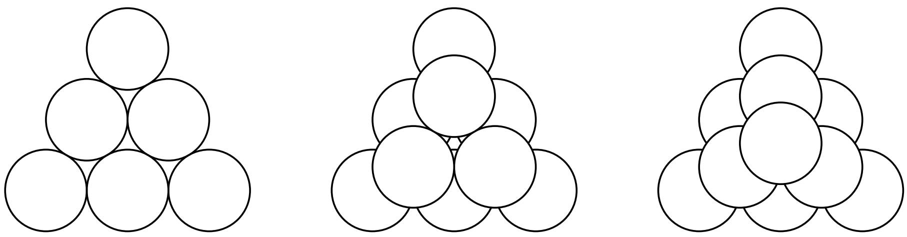
Erika chtěla nabídnout čokoládu svým třem kamarádkám. Když ji vytáhla z batohu, zjistila, že je polámaná jako na obrázku. (Vyznačené čtverečky jsou navzájem shodné.) Dívky se dohodly, že čokoládu dále lámat nebudou a losem určí, jak velký kousek která dostane.

Seřaďte čtyři kousky čokolády od nejmenšího po největší. (*K. Jasenčáková*)



Z6–I–3

Honza měl 100 stejných zavařovacích sklenic, z kterých si stavěl trojboké pyramidy. Nejvyšší poschodí pyramidy má vždy jednu sklenici, druhé poschodí shora představuje rovnostranný trojúhelník, jehož strana sestává ze dvou sklenic, atd. Příklad konstrukce trojposchoďové pyramidy je na obrázku.



1. poschodí 1. a 2. poschodí tříposchoďová pyramida

1. Kolik sklenic Honza potřeboval na pětiposchoďovou pyramidu?
2. Kolik poschodí měla pyramida, na niž bylo použito co nejvíc Honzových sklenic?

(*K. Jasenčáková*)

Z6–I–4

Veronika má klasickou šachovnici s 8×8 políčky. Řádky jsou označeny číslicemi 1 až 8, sloupce písmeny A až H. Veronika položila na políčko B1 koně, se kterým lze pohybovat pouze tak jako v šachách.

1. Je možné přemístit koně ve čtyřech tazích na políčko H1?
2. Je možné přemístit koně v pěti tazích na políčko E6?

Pokud ano, popište všechny možné posloupnosti tahů. Pokud ne, zdůvodněte, proč to možné není. (*K. Jasenčáková*)

Z6–I–5

V plechovce byly červené a zelené bonbóny. Čeněk snědl $\frac{2}{5}$ všech červených bonbónů a Zuzka snědla $\frac{3}{5}$ všech zelených bonbónů. Teď tvoří červené bonbóny $\frac{3}{8}$ všech bonbónů v plechovce.

Kolik nejméně bonbónů mohlo být původně v plechovce? (*L. Růžičková*)

Z6–I–6

Sestrojte libovolnou úsečku DS, pak sestrojte kružnici k se středem v bodě S, která prochází bodem D.

1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník DAS, jehož vrchol A leží na kružnici k.
2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrcholy B a C také leží na kružnici k.

(*L. Růžičková*)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Petr řekl Pavlovi: „Napiš dvojmístné přirozené číslo, které má tu vlastnost, že když od něj odečteš dvojmístné přirozené číslo napsané obráceně, dostaneš rozdíl 63.“

Které číslo mohl Pavel napsat? Určete všechny možnosti. (*L. Hozová*)

Z7–I–2

Jsou dány dvě dvojice rovnoběžných přímek $AB \parallel CD$ a $AC \parallel BD$. Bod E leží na přímce BD, bod F je středem úsečky BD, bod G je středem úsečky CD a obsah trojúhelníku ACE je $20\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah trojúhelníku DFG. (*V. Semeráková*)

Z7–I–3

Zoologická zahrada nabízela školním skupinám výhodné vstupné: každý pátý žák dostává vstupenku zdarma. Pan učitel 6.A spočítal, že pokud koupí vstupné dětem ze své třídy, ušetří za čtyři vstupenky a zaplatí 1 995 Kč. Paní učitelka 6.B mu navrhla, ať koupí vstupenky dětem obou tříd naráz, a tak budou platit 4 410 Kč.

Kolik dětí z 6.A a kolik dětí z 6.B šlo do zoo? (Cena vstupenky v Kč je celočíselná.) (*L. Šimůnek*)

Z7–I–4

Na stole leželo šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anežka z těchto kartiček složila šestimístné číslo, které bylo dělitelné šesti. Pak postupně odebírala kartičky zprava. Když odebrala první kartičku, zůstalo na stole pětimístné číslo dělitelné pěti. Když odebrala další kartičku, zůstalo čtyřmístné číslo dělitelné čtyřmi. Když odebírala dále, získala postupně trojmístné číslo dělitelné třemi a dvojmístné číslo dělitelné dvěma.

Které šestimístné číslo mohla Anežka původně složit? Určete všechny možnosti. (*L. Růžičková*)

Z7–I–5

Prokop sestrojil trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhel u vrcholu A byl větší než 60° a vnitřní úhel u vrcholu B byl menší než 60°. Jirka narýsoval v polorovině vymezené přímkou AB a bodem C bod D, a to tak, že trojúhelník ABD byl rovnostranný. Poté chlapci zjistili, že trojúhelníky ACD a BCD jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem D.

Určete velikost úhlu ACB. (*E. Semerádová*)

Z7–I–6

Vodník Chaluha naléval mlhu do rozmanitých, různě velkých nádob, které si pečlivě seřadil na polici. Při nalévání postupoval postupně z jedné strany, žádnou nádobu nepřeskakoval. Do každé nádoby se vejde alespoň decilitr mlhy.

Kdyby naléval mlhu sedmilitrovou odměrkou, mlha z první odměrky by naplnila přesně 11 nádob, mlha z druhé odměrky by naplnila přesně dalších 12 nádob a mlha z třetí odměrky by naplnila přesně 7 nádob. Pokud by použil pětilitrovou odměrku, pak mlha z první odměrky by naplnila přesně 8 nádob, ze druhé přesně 10 nádob, ze třetí přesně 7 nádob a ze čtvrté odměrky přesně 4 nádoby.

Rozhodněte, zda je třicátá nádoba v pořadí větší než pětadvacátá. (*K. Pazourek*)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Vyjádřete číslo milion pomocí čísel obsahujících pouze číslice 9 a algebraických operací plus, minus, krát, děleno, mocnina a odmocnina. Určete alespoň tři různá řešení.

(*L. Dedková*)

Z8–I–2

V ostroúhlém trojúhelníku KLM má úhel KLM velikost $68°$. Bod V je průsečíkem výšek a P je patou výšky na stranu LM. Osa úhlu PVM je rovnoběžná se stranou KM.

Porovnejte velikosti úhlů MKL a LMK. (*L. Hozová*)

Z8–I–3

Adélka měla na papíře napsána dvě čísla. Když k nim připsala ještě jejich největší společný dělitel a nejmenší společný násobek, dostala čtyři různá čísla menší než 100. S úžasem zjistila, že když vydělí největší z těchto čtyř čísel nejmenším, dostane největší společný dělitel všech čtyř čísel.

Která čísla měla Adélka napsána na papíře? (*M. Petrová*)

Z8–I–4

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej ten druhý rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 9:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 27 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně v 19:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 120 kafemlýnků.

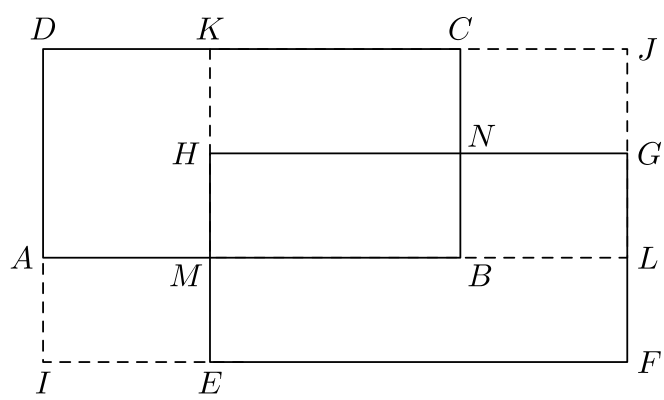
Za jak dlouho složí kafemlýnek Hubert? Za jak dlouho jej složí Robert?

(*K. Pazourek*)

Z8–I–5

Shodné obdélníky $ABCD$ a $EFGH$ jsou umístěny tak, že jejich shodné strany jsou rovnoběžné. Body I, J, K, L, M a N jsou průsečíky prodloužených stran jako na obrázku. Obsah obdélníku $BNHM$ je $12\,\mathrm{cm}^2$, obsah obdélníku $MBCK$ je $63\,\mathrm{cm}^2$ a obsah obdélníku $MLGH$ je $28\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah obdélníku $IFJD$. (*E. Semerádová*)

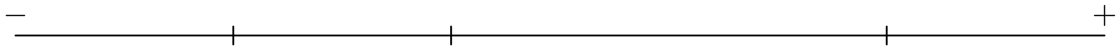


Z8–I–6

Přímka představuje číselnou osu a vyznačené body odpovídají číslům a, $-a$, $a+1$, avšak v neurčeném pořadí.

Sestrojte body, které odpovídají číslům 0 a 1. Proberte všechny možnosti.

($M.\ Petrová$)



67. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Věkový průměr všech lidí, kteří se sešli na rodinné oslavě, byl roven počtu přítomných. Teta Běta, které bylo 29 let, se záhy omluvila a odešla. I po odchodu tety Běty byl věkový průměr všech přítomných lidí roven jejich počtu.

Kolik lidí bylo původně na oslavě? (*L. Hozová*)

Z9–I–2

V lichoběžníku $VODY$ platí, že VO je delší základnou, průsečík úhlopříček K dělí úsečku VD v poměru $3:2$ a obsah trojúhelníku KOV je roven $13{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah celého lichoběžníku. (*M. Petrová*)

Z9–I–3

Roboti Robert a Hubert skládají a rozebírají kafemlýnky. Přitom každý z nich kafemlýnek složí čtyřikrát rychleji, než jej sám rozebere. Když ráno přišli do dílny, několik kafemlýnků už tam bylo složeno.

V 7:00 začal Hubert skládat a Robert rozebírat, přesně ve 12:00 Hubert dokončil skládání kafemlýnku a Robert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 70 kafemlýnků.

Ve 13:00 začal Robert skládat a Hubert rozebírat, přesně ve 22:00 dokončil Robert skládání posledního kafemlýnku a Hubert rozebírání jiného. Celkem za tuto směnu přibylo 36 kafemlýnků.

Za jak dlouho by složili 360 kafemlýnků, pokud by Robert i Hubert skládali společně? (*K. Pazourek*)

Z9–I–4

Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 se chystala na cestu vlakem se třemi vagóny. Chtěla se rozsadit tak, aby v každém vagóně seděla tři čísla a největší z každé trojice bylo rovno součtu zbylých dvou. Průvodčí tvrdil, že to není problém, a snažil se číslům pomoct. Naopak výpravčí tvrdil, že to není možné.

Rozhodněte, kdo z nich měl pravdu. (*E. Novotná*)

Z9–I–5

Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body E a F tak, že úsečky EA, ED, EF, FB, FC jsou navzájem shodné. Strana AB je dlouhá $22\,\mathrm{cm}$ a kružnice opsaná trojúhelníku AFD má poloměr $10\,\mathrm{cm}$.

Určete délku strany BC. (*L. Růžičková*)

Z9–I–6

Na přímce představující číselnou osu uvažte navzájem různé body odpovídající číslům a, $2a$, $3a+1$ ve všech možných pořadích. U každé možnosti rozhodněte, zda je takové uspořádání možné. Pokud ano, uveďte konkrétní příklad, pokud ne, zdůvodněte proč. (*M. Petrová*)

$-$ $+$